

2021年山西省高考考前适应性测试(二)

理科数学参考答案及评分说明

评分说明:

1. 考生如按其他方法或步骤解答,正确的,同样给分;有错的,根据错误的性质,参照评分说明中相应的规定评分.
2. 计算题只有最后答案而无演算过程的,不给分;只写出一般公式但未能与试题所给的具体条件联系的,不给分.

一、选择题

A卷选择题答案

1. B 2. B 3. C 4. B 5. D 6. C 7. D 8. D 9. A 10. D 11. A 12. A

B卷选择题答案

1. B 2. C 3. C 4. B 5. A 6. C 7. D 8. D 9. C 10. D 11. D 12. A

二、填空题

13. $(-1, 2)$

14. $y = 3x - 9$

15. $\sqrt{7}$

16. $\frac{972\pi}{529}$

三、解答题

17. 解:(1)设公差为 d ,则 $d>0$, $\therefore a_1+a_2+a_3=9$, $\therefore 3a_2=9$, $a_2=3$,

又 $\therefore a_2$ 是 a_1 与 a_3+4 的等比中项, $\therefore a_2^2=a_1 \cdot (a_3+4)$,解得 $d=2$ 或 $d=-6$ (舍去),

$\therefore a_n = a_2 + 2(n-2) = 2n-1$ 6分

(2)由(1)得 $b_n = a_n \cdot 2^{a_n+1} = (2n-1) \cdot 2^{2n}$,故其前 n 项和 $S_n = 1 \times 4 + 3 \times 4^2 + 5 \times 4^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 4^{n-1} + (2n-1) \cdot 4^n$,①

则 $4S_n = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + 5 \times 4^4 + \cdots + (2n-3) \cdot 4^n + (2n-1) \cdot 4^{n+1}$,②

由①-②得 $-3S_n = 4 + 2 \times 4^2 + 2 \times 4^3 + \cdots + 2 \times 4^n - (2n-1) \cdot 4^{n+1}$,

$\therefore S_n = \frac{6n-5}{9} \cdot 4^{n+1} + \frac{20}{9}$ 12分

18. (1)证明:(法一) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,则 $AC \perp BD$.设 AC 与 BD 交于点 F ,连接 PF ,

如图1所示, $\because PD=PB$, $\therefore PF \perp BD$.

又 $\because PF \cap AC = F$, $PF \subset$ 平面 PAC , $AC \subset$ 平面 PAC ,

$\therefore BD \perp$ 平面 PAC 6分

(法二)由题可知 $BD = 2$, 因此三棱锥 $P - ABD$ 是棱长为 2 的正四面体.

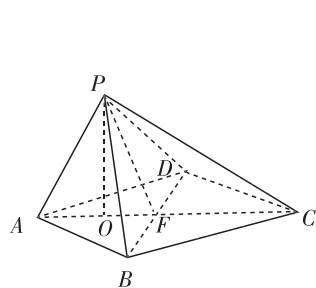
设 AC 交 BD 于 F , 取 AF 的三等分点 O 且 $AO = 2OF$,

如图 1 所示, 连接 PO , 则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

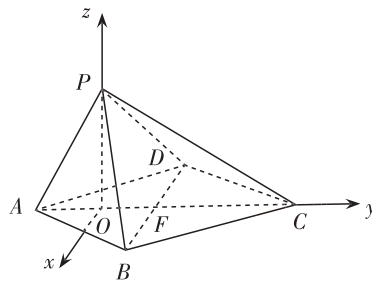
因此 $PO \perp BD$, 又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形, 则 $AC \perp BD$.

$\because AC \subset$ 平面 PAC , $PO \subset$ 平面 PAC , 且 $AC \cap PO = O$,

$\therefore BD \perp$ 平面 PAC 6 分



(第 18 题图 1)



(第 18 题图 2)

(2)解:如图 2 所示, 以 O 为原点, 过 O 且平行于 BD 的直线为 x 轴, AC 所在直线为 y 轴, OP 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系,

$$\text{则 } B\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), D\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), C\left(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right), P\left(0, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right),$$

因此, 在平面 PBC 中,

$$\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{PC} = \left(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right),$$

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0, \\ 4\sqrt{3}y - 2\sqrt{6}z = 0. \end{cases} \therefore \text{可取 } \mathbf{m} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{2}). \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{同理, 在平面 } PDC \text{ 中, } \overrightarrow{DC} = (1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{PC} = \left(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right),$$

$$\text{则该平面的一个法向量为 } \mathbf{n} = (-\sqrt{3}, 1, \sqrt{2}). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因此平面 PBC 与平面 PDC 的法向量所成角的余弦值为 $\cos\theta = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = 0$, 因此这两个平面互相垂直,

即二面角 $B - PC - D$ 的大小为 90° 12 分

$$19. \text{解: (1) 一个组失误 0 次的概率为 } P_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}; \text{ 仅第一步失误一次的概率为 } P_1 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{81},$$

$$\text{则一个组在不超过 4 小时完成任务的概率为 } P = P_0 + P_1 = \frac{1}{27} + \frac{2}{81} = \frac{5}{81}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2)①随机变量 X 的可能取值为 3, 4, 5, 6,

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}, P(X = 4) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=5)=C_3^2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, P(X=6)=\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

则 X 的分布列为:

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{27} + 4 \times \frac{2}{9} + 5 \times \frac{4}{9} + 6 \times \frac{8}{27} = 5. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

②总得分大于 n 的概率为 $K_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

$$\text{则 } \{K_n\} \text{ 的前 15 项和为 } S_{15} = 15 - \frac{\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3^{15}}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{29}{2} + \frac{1}{2 \times 3^{15}}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (1)解:过点 P 作 C 的准线的垂线,垂足为 N .连接 NQ .

由抛物线的定义知 $|PN| = |PF|$. 则 $|PQ| + |PF| = |PQ| + |PN| \geq |NQ|$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

当 N, P, Q 三点共线时, $|NQ|$ 取得最小值.

$\therefore 3 + \frac{p}{2} = 4$, 解得 $p=2$. 故抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2)证明:设直线 $l: x = my + n (n \neq 0)$, 且直线 l 与抛物线 C 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则由 $\begin{cases} x = my + n, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 化简得 $y^2 - 4my - 4n = 0$, 且 $\Delta = 16m^2 + 16n > 0$, 即 $m^2 + n > 0$,

$\therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = 4m, \\ y_1 \cdot y_2 = -4n, \end{cases}$ 则可得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m^2 + 2n, \\ x_1 \cdot x_2 = n^2. \end{cases}$ $\therefore$ 可得圆心坐标为 $(2m^2 + n, 2m)$.

$\therefore$ 圆心在直线 $y = -1$ 上, $\therefore 2m = -1, m = -\frac{1}{2}$.

又 $\therefore$ 以线段 AB 为直径的圆经过点 $F(1, 0)$, $\therefore \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$, $\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1 y_2 = 0$,

$\therefore x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 + y_1 y_2 = 0$, 即 $n^2 - (4m^2 + 2n) + 1 - 4n = 0$, 化简得 $n^2 - 6n = 0$, 可得 $n = 0$ (舍去) 或 $n = 6$.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x = -\frac{1}{2}y + 6$, 即 $2x + y - 12 = 0$, 且直线 l 的斜率为 $k_1 = -2$,

由 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + 6, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $A(4, 4)$.

$\therefore$ 当 $y > 0$ 时, 抛物线 $y^2 = 4x$ 在 x 轴上方曲线的方程为 $y = 2\sqrt{x}$,

$\therefore y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 则抛物线 $y^2 = 4x$ 在 $A(4, 4)$ 处的切线的斜率为 $k_{\text{切}} = y'|_{x=4} = \frac{1}{2}$.

$\therefore k_1 \cdot k_{\text{切}} = (-2) \times \frac{1}{2} = -1$, $\therefore$ 直线 l 与抛物线 C 在点 A 处的切线垂直. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 解: (1) $f'(x) = xe^x - 2ax = x(e^x - 2a)$,

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $e^x - 2a > 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(ii) 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 由 $e^x - 2a = 0$, 得 $x = \ln(2a) < 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln(2a))$ 上单调递增, 在区间 $(\ln(2a), 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(iii) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 由 $e^x - 2a = 0$, 得 $x = \ln(2a) = 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

(iv) 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 由 $e^x - 2a = 0$, 得 $x = \ln(2a) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在区间 $(0, \ln(2a))$ 上单调递减, 在区间 $(\ln(2a), +\infty)$ 上单调递增. 6分

(2) 设 $g(x) = f'(x) = xe^x - 2ax$, 且 $a > 0$,

$$\therefore g'(x) = (x+1)e^x - 2a,$$

$$\text{设 } h(x) = (x+1)e^x - 2a, h'(x) = (x+2)e^x,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 且当 $a > 0$ 时, $h(-2) = -e^{-2} - 2a < 0$,

又 $\therefore$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上必存在唯一零点 x_0 , 使 $h(x_0) = 0$,

即在 $(-\infty, x_0)$ 上 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

$\therefore g(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最小值.

$$\text{又 } \therefore h(x_0) = g'(x_0) = (x_0 + 1)e^{x_0} - 2a = 0, \therefore 2a = (x_0 + 1)e^{x_0},$$

$$\text{则 } [f'(x)]_{\min} = g(x_0) = x_0 e^{x_0} - 2ax_0 = x_0 e^{x_0} - (x_0 + 1)x_0 e^{x_0} = -x_0^2 e^{x_0} = -e,$$

$$\text{设 } t(x) = -x^2 e^x (x > -2), \therefore t'(x) = -x(x+2)e^x,$$

当 $x \in (-2, 0)$ 时, $t'(x) > 0$, $t(x)$ 单调递增, 所以 $-4e^{-2} < t(x) < 0$, 此时 $t(x) > -e$;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $t'(x) < 0$, $t(x)$ 单调递减, 所以 $t(x) < 0$, 又 $t(1) = -e$, 所以 $x_0 = 1$.

$$\text{所以 } a = \frac{(x_0 + 1)e^{x_0}}{2} = e. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

$$22. \text{解: (1) 将 } C_1: \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{t+1}, \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{t+1} \end{cases} (t \text{ 为参数}) \text{ 消去参数 } t, \text{ 化简得 } x + 2y - 3 = 0 (x \neq 2),$$

将 $C_2: \rho \cos^2 \theta + \cos \theta - \rho = 0$ 化为直角坐标方程为 $y^2 = x$ 4分

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ y^2 = x, \end{cases} \text{ 化简得 } y^2 + 2y - 3 = 0, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 9, \\ y = -3. \end{cases}$$

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}, \text{ 点 } O \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } d = \frac{3}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = 6. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

23. (1) 证明: (法一) $\therefore \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立,

$\therefore$ 令 $b=1$, 则有 $\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} \geq \frac{a+1}{2}$, 当且仅当 $a=1$ 时, 等号成立, 即 $\sqrt{a^2+1} \geq \frac{a+1}{\sqrt{2}}$ 4分

(法二) 欲证 $\sqrt{a^2+1} \geq \frac{a+1}{\sqrt{2}}$, 则只需证 $\sqrt{2(a^2+1)} \geq a+1$, 即证 $2(a^2+1) \geq (a+1)^2$,

即证 $2a^2+2 \geq a^2+2a+1$, 即证 $a^2-2a+1 \geq 0$,

又因为 $\forall a \in \mathbf{R}$, 有 $a^2-2a+1 \geq 0$ 恒成立,

所以原不等式成立. 4分

(2) 解: 由(1)得 $\sqrt{a^2+1} \geq \frac{a+1}{\sqrt{2}}$, 即 $a^2+1 \geq \frac{(a+1)^2}{2}$, 当且仅当 $a=1$ 时, 等号成立,

$$\therefore \frac{ab+b}{a^2+b^2+1} = \frac{(a+1)b}{(a^2+1)+b^2} \leq \frac{(a+1)b}{\frac{(a+1)^2}{2}+b^2},$$

又 $\therefore \frac{(a+1)^2}{2}+b^2 \geq 2\sqrt{\frac{(a+1)^2}{2} \cdot b^2} = \sqrt{2}(a+1) \cdot b$, 当且仅当 $\sqrt{\frac{(a+1)^2}{2}} = b$ 时, 等号成立, 即 $a+1 = \sqrt{2}b$,

即 $\begin{cases} a=1, \\ b=\sqrt{2}, \end{cases}$ 等号成立, 所以 $\frac{(a+1) \cdot b}{\frac{(a+1)^2}{2}+b^2} \leq \frac{(a+1) \cdot b}{\sqrt{2}(a+1) \cdot b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 当 $a=1, b=\sqrt{2}$ 时, $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 取到最大值, 且最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 10分

山西思而行教育科技有限公司

山西思而行教育科技有限公司

山西思而行教育科技有限公司

山西思而行教育科技有限公司

山西思而行教育科技有限公司

山西思而行教育科技有限公司